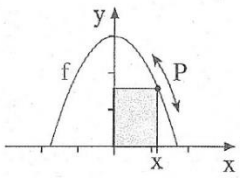
Beispielaufgaben zur Optimierung / Extremwertaufgabe

Aufgabe 1

Die Zahl 60 soll so in zwei Summanden a und b zerlegt werden, dass das Produkt aus dem ersten Summanden und dem Quadrat des zweiten Summanden maximal wird.

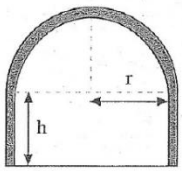
Aufgabe 2

Der Eckpunkt $P(x|y)$ des abgebildeten achsenparallelen Rechtecks liegt auf der Parabel $f(x) = 3 - x^2$.
Wie muss x gewählt werden, damit die Rechtecksfläche maximal wird?



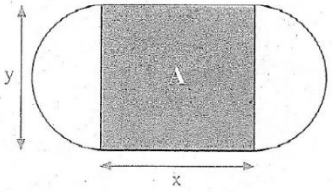
Aufgabe 3

Ein Tunnel soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Wie groß ist die Querschnittsfläche maximal, wenn der Umfang des Tunnels 20 m betragen soll?



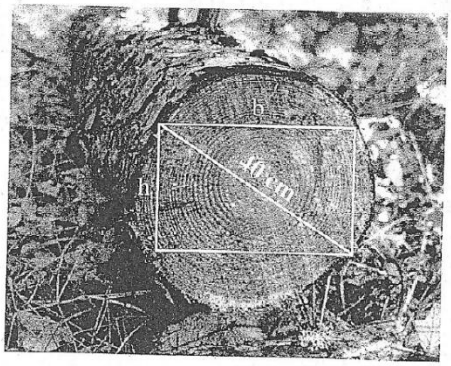
Aufgabe 4

Das abgebildete Stadion hat die Form eines Rechtecks mit zwei angesetzten Halbkreisen. Der Umfang beträgt 400 m. Welche Maße muss das Rechteck erhalten, wenn seine Fläche maximal sein soll?

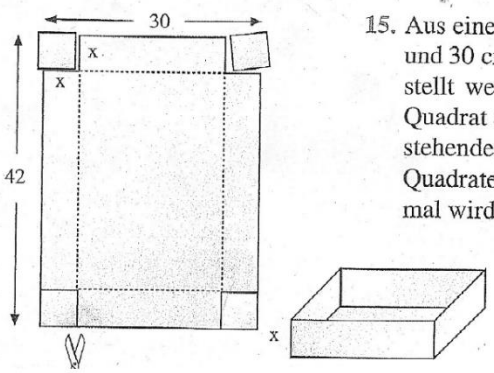


Aufgabe 5

Beispiel: Aus einem Stamm mit nahezu kreisförmigem Querschnitt soll ein rechteckiger Balken geschnitten werden. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist proportional zur Breite sowie zum Quadrat der Höhe des Balkens.
Die von der Holzart abhängige Proportionalitätskonstante sei C. Der Durchmesser des Stamms betrage 40 cm.
Welche Höhe h und welche Breite b muss der Balken erhalten, damit seine Tragfähigkeit maximal wird?



Aufgabe 6



15. Aus einem rechteckigen Stück Pappe von 42 cm Länge und 30 cm Breite soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu wird an jeder der vier Ecken ein Quadrat abgeschnitten. Anschließend werden die überstehenden Streifen hochgeklappt. Wie groß müssen die Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

Aufgabe 1

1. Variable: P
2. Formel: $P = a \cdot b^2$
3. Nebenbedingung: $a = 60 - b$
4. Zielfunktion: $P_{(b)} = (60-b) \cdot b^2$

   $P_{(b)} = 60b^2 - b^3$

   $P_{(b)} = -b^3 + 60b^2$
5. Extremstellen ermitteln: $P'_{(b)} = -3b^2+120b$

   $P''_{(b)} = -6b+120$
6. Extremstelle: $P`_{(b)} = 0$

   $-3b^2 + 120b = 0$

   $b \cdot (-3b+120) = 0$

   1. Fall: $b = 0$

   2. Fall: $-3b+120 = 0 \mid -120$ gleich null setzen

   $-3b = -120 \mid : (-3)$

   $b = 40$

   $P''_{(40)} = -6 \cdot 40 + 120$

   $= -240 + 120 < 0 \Rightarrow$ HP

   $a = 60 - 40$

   $a = 20$

Antwort: Bei a=20 und b=40 ist das Produkt maximal.

Aufgabe 2

1. Variable: A
2. Formel: $A = x \cdot y$
3. Nebenbedingungen: $y = 3 - x^2$
4. Zielfunktion: $A_{(x)} = x\,(3-x^2)$

$$A_{(x)} = -x^3 + 3x$$

5.Ableitungen/ Extremstelle: $A'_{(x)} = -3x^2 + 3$

$$A''_{(x)} = -6x$$

$$-3x^2 + 3 = 0 \quad | - 3$$
$$-3x^2 = -3 \quad |: (-3)$$
$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$
$$x_{1,2} = \pm 1$$

$x_1 = +1 \qquad x_2 = -1$

$A''_{(-1)} = -6(-1) = 6 > 0 \rightarrow$ TP

$A''_{(1)} = -6(1) = -6 < 0 \rightarrow$ HP

Antwort: Bei einem x- Wert von +1 ist die Fläche des Rechtecks maximal.

Aufgabe 3

1. Zu optimierende Variable ermitteln

Fläche: A

2.Formel aufstellen $A = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 2rh$

3.Nebenbedingungen aufstellen

$20 = \pi r + 2h \mid \div 2$

$10 = \frac{\pi \cdot r}{2} + h \mid - \frac{\pi r}{2}$

$h = 10 - \frac{\pi r}{2}$

4. Zielfunktion

$A_{(r)} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 2r \cdot (10 - \frac{\pi r}{2})$

$A_{(r)} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 20r - 2r \cdot \frac{\pi r}{2}$

$A_{(r)} = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 20r - \pi r^2$

5.Extremstellen:

$A'_{(r)} = \pi r + 20 - 2\pi r$

$A''_{(r)} = \pi + 2\pi$

$A'_{(r)} = 0$

$0 = \pi r + 20 - 2\pi r \mid$

$-20 = -\pi r \mid \div (-\pi)$

$r = \frac{-20}{-\pi} = 6{,}37$

$A''(6{,}37) = \pi - 2\pi < 0 \Rightarrow$ HP

$A = (\frac{-20}{-\pi}) = 63{,}66$

Aufgabe 4

1. Variable, die man ermitteln möchte
   Fläche: A
2. Formel aufstellen
   $A = x \cdot y$
3. Nebenbedingung aufstellen
   $400 = 2x + \frac{1}{2} (2y \cdot \pi)$
   $400 = 2x + y\pi$ |-yπ
   $400 – y\pi = 2x$ |:2
   $200 – y\ \pi/2 = x$
   $200 - ½\ y\pi = x$

4. Zielfunkton aufstellen

   $A\ (Y) = (200 - ½\ y\pi) \cdot y$

   $A(y) = 200y - 1/2\ \pi\ y^2$

5. Hochpunkt/ Tiefpunkt finden
   $A‘\ (y) = 200 - \pi y$
   $A‘‘\ (y) = \pi$

   $A‘\ (y) = 0$
   $\pi y + 200 = 0$ |-200
   $-200 = \pi y$ |: π
   $y = 63{,}66$

   Antwort: Die Länge von y ist 63,66m um den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks, des Stadions zu erreichen.

Aufgabe 5

1. Variable ermitteln, die man optimieren möchte: Tragfähigkeit: T

2. Formel aufstellen: $T = C \cdot b \cdot h^2$

3. Nebenbedingung aufstellen:
$40^2 = h^2 + b^2$
$40^2 - b^2 = h^2$

4. Zielfunktion aufstellen:
$T_{(b)} = C \cdot b \cdot (1600 - b^2)$
$T_{(b)} = 1600C\, b - C\, b^3$
$T_{(b)} = -C\, b^3 + 1600C\, b$

5. Ableitung /Extremstellen:
$T'_{(b)} = -3C\, b^3 + 1600C$
$T''_{(b)} = -9C\, b^2$

$T'_{(b)} = -3C\, b^3 + 1600C = 0$
$-3Cb^3 + 1600C = 0$
$-3Cb^3 = -1600C \mid : -3C$
$b^3 = \frac{-1600\,C}{-3C} \mid \sqrt[3]{\ }$
$b = \sqrt[3]{\frac{-1600\,C}{-3c}} = \sqrt[3]{\frac{-1600}{-3}} = 8{,}1$
$T''_{(8,1)} = -9C\,(8,1)^2 < 0 \Rightarrow$ HP

Antwort: Bei b=8,1 und h=39,17 ist die Tragfähigkeit maximal

Aufgabe 6

1.Variable aufstellen: Volumen: V

2.Formel $V = a \cdot b \cdot c$

3.Nebenbedingung $a = 42 \cdot 2x$

$b = 30 - 2x$

$c = x$

4.Zielfunktion $V_{(x)} = (42-2x) \cdot (30-2x) \cdot x$

$V_{(x)} = 1260x - 84x^2 - 60x^2 + 4x^3$

$V_{(x)} = 4x^3 - 144x^2 + 1260x$

5. Extremstellen

$V'_{(x)} = 12x^2 - 288x + 1260$

$V''_{(x)} = 24x - 288$

$V'_{(x)} = 0$

$12x^2 - 288x + 1260 = 0$

$x^2-24x+105 = 0$

$x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 105}$

$x_{1,2} = 12 \pm 6{,}245$

$x_1 = 18{,}245$

$x_2 = 5{,}755$

$V''(5{,}755) = 24 \cdot 5{,}755 - 288$

$= 138{,}12 - 288 < 0 \rightarrow$ HP

$V''_{(18{,}245)} = 24 \cdot 18{,}245 - 288 = 437{,}88-288 > 0 \rightarrow$ TP

Bei einer Seitenlänge des abgeschnitten Quadrates von 5,755cm bzw. bei einer Fläche von ca. $5{,}76^2$ cm Quadrat ist das Volumen der Schachtel maximal. Möchte man wissen, wie groß das Volumen ist, kann man die 5,76 in die Zielfunktion einsetzen und erhält ein Volumen von $3244{,}43^3$.